Równania różniczkowe liniowe ($y'+p(x)y=q(x)$)

(1) $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$

a) Rozwiązujemy równanie jednorodne $y' - \frac{2}{x}y = 0 \;/ : y \quad y \neq 0$

$y=0$ – rozwiązanie

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} \to \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} \;/\cdot dx \to \frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx$$

stąd $\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} \to \ln|y| = 2\ln|x| + C_1 \quad C_1 \in R$

$\ln|y| = \ln|x^2| + \ln C_2 \quad C_2 \in R$

$\ln|y| = \ln C_2 x^2 \to |y| = C_2 x^2.$

Po opuszczeniu bezwzgl. wartości i dołączeniu rozwiązania $y=0$ otrzymujemy

$y = Cx^2 \quad C \in R$ ← rozwiązanie ogólne rr jednorodn.

b) Uzmiennienie stałej

(*) $\underline{y = C(x)\cdot x^2}$

Obliczamy pochodną $y' = C'(x)\cdot x^2 + C(x)\cdot 2x$

Wstawiamy y i y' do równania wyjściowego

$$\underbrace{C'(x)\cdot x^2 + C(x)\cdot 2x}_{y'} - \frac{2}{x}\cdot \underbrace{C(x)\cdot x^2}_{y} = 2x^3$$

$$C'(x)\cdot x^2 + \cancel{2xC(x)} - \cancel{2xC(x)} = 2x^3$$

Powinny się skrócić wyrazy zawierające $C(x)$. Jeśli się nie skracają, tzn. że popełniliśmy błąd w przekształceniach.

$C'(x)\cdot x^2 = 2x^3 \;/: x^2 \to C'(x) = 2x$

Całkujemy obie strony: $C(x) = x^2 + C_3, \; C_3 \in R$

Wstawiamy $C(x)$ do rozwiązania $y = C(x)\cdot x^2$ czyli (*) otrzymujemy:

$$\underline{y = (x^2 + C_3)\cdot x^2, \; C_3 \in R}$$

To jest rozwiązanie równania (1).

(2) $x(y'-y)=e^x$

Najpierw sprowadzamy równanie do postaci $y'+p(x)\cdot y=q(x)$.

$$x(y'-y)=e^x \,/ : x$$

(2') $y'-y=\frac{e^x}{x}$

Teraz rozwiązujemy równanie jednorodne $\underline{y'-y=0}$ $/ : y$ — $y=0$ jest rozwiązaniem

$$\frac{y'}{y}=1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{y}=1 \,/ \cdot dx \rightarrow \frac{dy}{y}=dx$$

Całkujemy obie strony $\int\frac{dy}{y}=\int dx \rightarrow \ln|y|=x+C_1,\ C_1\in\mathbb{R}$

$$|y|=e^{x+C_1} \rightarrow |y|=e^x\cdot \underbrace{e^{C_1}}_{C_2} \rightarrow |y|=C_2\cdot e^x \quad C_2\in\mathbb{R}_+$$

Opuszczamy bezwzgl. wartość i dołączamy $y=0$.

$y=Ce^x,\ C\in\mathbb{R}$ – To jest rozwiązanie równania jednorodn.

Uzmienniamy stałą, czyli:

(3) $y=C(x)\cdot e^x$

Obliczamy pochodną

$y'=C'(x)\cdot e^x+C(x)\cdot e^x$ i wstawiamy do równania (2')

Otrzymujemy

$$\underbrace{C'(x)\cdot e^x+C(x)\cdot e^x}_{y'}-\underbrace{C(x)\cdot e^x}_{y}=\frac{e^x}{x}$$

Redukujemy po lewej stronie:

$$C'(x)\cdot e^x+\cancel{C(x)\cdot e^x}-\cancel{C(x)\cdot e^x}=\frac{e^x}{x}$$

$$C'(x)\cdot e^x=\frac{e^x}{x} \,/ : e^x \rightarrow C'(x)=\frac{1}{x}$$

Całkujemy stronami:

$$C(x)=\ln|x|+C_3,\ C_3\in\mathbb{R}$$

Wstawiamy do rozwiązania (3) otrzymujemy

$y=(\ln|x|+C_3)\cdot e^x \quad C_3\in\mathbb{R}$; jeśli $C_3=\ln C_4 \quad C_4\in\mathbb{R}_+$

lub.

$y=(\ln C_4|x|)e^x$ ← rozwiązanie równania (2).

(3) $y' - \frac{2}{x}\cdot y = x+1$ $\qquad$ $y' + p(x)\cdot y = q(x)$

równanie jednorodne $y' - \frac{2}{x}y = 0 \ /:y$ $\quad y \neq 0$, $y=0$ jest rozwiązan.

$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$ lub $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} \ /\cdot dx \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx$

Całkujemy po obu stronach: $\int \frac{dy}{y} = 2\int\frac{dx}{x} \rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$

Jeśli przyjmiemy $C_1 = \ln C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}_+$

wtedy $\ln|y| = \ln(C_2\cdot x^2) \rightarrow |y| = C_2\cdot x^2$ opuszcz. b. wart. i dołączy $y=0$

Czyli $y = Cx^2$, $C\in\mathbb{R}$ – rozwiązanie ogólne r-nia jednorodn.

Uzmienniamy stałą: $y = C(x)\cdot x^2$ $\quad (3')$

Obliczamy pochodną: $y' = C'(x)\cdot x^2 + 2x\cdot C(x)$ i wstawiamy do równania (3).

$$\cancel{C'(x)\cdot x^2 + 2x\,C(x) = x+1}$$

$$\underbrace{C'(x)\cdot x^2 + C(x)\cdot 2x}_{y'} - \frac{2}{x}\cdot\underbrace{C(x)\cdot x^2}_{y} = x+1$$

$$C'(x)x^2 + \cancel{C(x)\cdot 2x} - \cancel{2x\cdot C(x)} = x+1$$

$$C'(x)\cdot x^2 = x+1 \ /:x^2$$

$$C'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Całkujemy obie strony:

$$C(x) = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx \rightarrow C(x) = \ln|x| - \frac{1}{x} + C_3,\ C_3\in\mathbb{R}$$

Wstawiamy otrzymane rozwiązanie do rozwiązania (3')

$$y = \left(\ln|x| - \frac{1}{x} + C_3\right)\cdot x^2,\ C_3 \in \mathbb{R}.$$

To jest rozwiązanie równania (3).